

1003

Matematik förstår man inte, man vänjer sig (John von Neumann)

Sten Kaijser är professor emeritus i matematik vid Uppsala Universitet.

Inledning

När jag själv gick i skolan eller läste vid universitetet så tyckte jag aldrig att jag förstod något. Själva frågan var svår – vad var det man skulle förstå? Efter ett helt arbetsliv som matematiker tycker jag fortfarande att det är en omöjlig fråga. I många år har jag sagt att jag skulle aldrig våga fråga en klass om de har förstått för om någon skulle svara ja så skulle jag nämligen bli alldeles förskräckt – vad tror han/hon det är att förstå?

Många av mina kolleger har i många år intresserat sig för gymnasieundervisningen i matematik. För mig var det inte gymnasiet som var det intressantaste, utan grundskolan. Hur kommer det sig att så många barn älskar matte de första åren i skolan och tycker att det är urtrist när de går ur grundskolan. Så att efter att jag hade fått min sista månadslön, i augusti 2007, så steg jag in på den mest spännande skolan i min närhet – Gottsundaskolan i ett av Uppsalas invandrartätaste områden – och frågade om man var intresserad av att en nypensionerad matematikprofessor deltog i matematiklektioner vid skolan. Sedan dess har jag medverkat drygt två timmar i veckan i en 7:a. Jag återkommer till detta senare, men först ska jag berätta lite mer om min egen bakgrund.

Min egen skoltid

Jag började i svensk skola i tredje klass höstterminen 1948. Då hade jag gått två år i amerikansk skola, vilket bl.a. innebar att jag hade fått skriva med vänster hand. De två första åren i svensk skola blev jobbiga eftersom jag dels hade problem med att överhuvudtaget läsa och skriva svenska, och dessutom skulle jag kämpa med att skriva med bläck i ett bleckhorn. Att jag var duktig i matematik hade jag ingen aning om och fick inte heller veta förrän i samband med de s.k. standardproven i matematik. De gick trots allt så bra så att jag fick börja i realskolan höstterminen 1950.

I realskolan gick det någorlunda den första höstterminen, men på vårterminens första provräkning så fick jag underkänt, BC – som det hette på den tiden. Då blev min far arg på mig. Inför påsklovet inköpte han en annan räknebok för realskolans första klass, och när lovet kom sattes jag att räkna igenom den boken. De två provräkningar som följde hade jag båda A på, och betyget blev AB. Efter det var jag en snabbräknare och hade därmed gott om tid för de svårare problemen i slutet av provräkningarna, så att under resten av min skoltid så gick matten bra.

Jag tror inte att jag någonsin tyckte att matematiken var särskilt rolig, även om jag tyckte om den Euklidiska geometrin. Något annat som jag blev road av var tabellen på kvadrater – jag var fascinerad av hur slutsiffrorna upprepade sig. Att matematiken inte var mitt favoritämne beror nog mest på att jag alltid varit nyfiken och frågvis och det fanns mycket mer att fråga om i andra ämnen. Matematiken gick bra men om någon skulle ha frågat mig om jag förstod vad jag höll på med så skulle jag nog inte ha förstått frågan – det var ju bara att räkna.

Universitetsstudierna

Jag har aldrig varit en bra lärare. Den främsta anledningen till detta var att jag var en dålig student. Det var inte det att studierna gick dåligt, men jag har aldrig lyckats lära mig en god studieteknik. I skolan visste jag sällan vad vi hade i läxa, så att när jag öppnade en lärobok så läste jag bara rakt på – så länge som jag tyckte att det var roligt eller så länge jag orkade. Det gjorde att jag nästan alltid låg före i alla ämnen, vilket i sin tur gjorde att jag för det mesta hängde med på lektionerna. Lyckligtvis älskade jag alla böcker t.o.m. mina läroböcker. Däremot hade jag aldrig lärt mig att göra anteckningar under lektionerna.

När jag skulle börja vid universitetet så berättade alla om hur viktigt det var att göra bra anteckningar, så den första terminen ansträngde jag mig att göra bra föreläsningsanteckningar. Det var bara det att jag aldrig läste mina anteckningar och när jag upptäckte det så lade jag av. Istället återgick jag till den teknik jag använt i skolan. Den enda kurs som var problematisk var "2-an i matte" för det var en kurs där jag aldrig öppnade läroboken. Boken skrämde mig och om det inte varit för min räknevana så skulle jag aldrig ha klarat den kursen. Att jag överhuvudtaget gjorde det berodde främst på att jag under julen läste en helt annan lärobok.

Arbetslivet

hoppas jag över, det har inte så mycket med den här föreläsningen att göra, istället går jag direkt till

mitt liv som pensionär

Som jag började berätta så tog jag i augusti i fjol kontakt med Gottsundaskolan. Dagen efter, när jag cyklade "till jobbet" (ja, jag har lite kvar att göra där), så fick jag sällskap med en granne och berättade om mitt besök i skolan. Hon berättade att hennes son gick i en 7:a där, och han hade en underbar mattelärare, Sadia. Jag fick en epostadress, skrev ett brev (mejl) och ett par dagar senare fick jag ett positivt svar. Först och främst blev jag imponerad av att hon var så positiv – jag var lite rädd att hon mest skulle vara rädd för mig.

Men det var hon inte, utan jag började följa med till lektionerna. Det jag visste var att det första jag måste lära mig var namnen på alla barn i klassen. Sedan började jag att, precis som Sadia, gå runt och hjälpa till när någon ville ha hjälp. Så småningom började jag se vilka som behövde mer hjälp än andra. Till saken hör att det är en spännande klass. Nio av barnen kommer ifrån Sunnersta, som väl närmast skulle kunna beskrivas som Uppsalas Bromma. De övriga, varav sju med invandrarbakgrund, kommer ifrån Gottsunda. De olika grupperna umgås inte särskilt mycket med varann, men som Sadia påpekat – de är snälla mot varann.

Under hösten började de med ekvationer, och jag blev glad över titeln på denna föreläsning.

Man vänjer sig!

Jag ställde frågan "hur många x finns det i uttrycket $6x - 2x + 4x$ " och fick svaret 3. Naturligtvis! Eller ännu bättre "vad är $5x/y$ om $x=4$, $y=5$?" med svaret 10,8. Javisst. Jag har vant mig vid att $5x$ betyder $5 \times x$ men det tog tid för barnen att vänja sig. Det är ju trots allt ingenting att förstå.

Vårt samarbete har fortsatt så att oftast är vi båda två i klassen och ägnar mest tid åt de svagare. Då och då har jag de duktigaste och berättar om sådant som de inte får lära sig. Det jag fått under det halvår som jag deltagit i undervisningen är bland mycket annat en möjlighet

att se hur mina egna tankar om hur man lär sig matematik står sig när de konfronteras med verkligheten.

Och därmed börjar jag närma mig det som den här föreläsningen är tänkt att handla om. Hur lär man sig matematik och vad är det att förstå? När det för åtta år sedan blev aktuellt att vi i Sverige skulle ägna oss åt matematikdidaktik så blev jag indragen även om mitt huvudintresse då var matematikens historia. Jag hade sysslat med matematikens historia i nästan 15 år och bl.a. insett att vissa saker faktiskt är svåra. **Bråkräkning är svårt!** "Beviset" är att man i de flesta kulturer undvikit att räkna med bråk. Det är när man sysslar med "kontinuerliga storheter" som längder, vikter, tid och liknande som man inte kan räkna med heltal. Även om man har infört måttenheter så stämmer det ju aldrig precis och ibland behöver man tal som ligger mellan heltalen. Lösningen på detta problem var att införa mindre enheter – inte att använda bråk. Något som också är svårt är de komplexa talen. Det tog närmare 300 år, från början av 1500-talet till början av 1800-talet, för matematikerna att lära sig att handskas med dem. Vi ska inte bli förvånade om även duktiga elever får svårigheter när de ska lära sig sådant som världens främsta matematiker brottats med i flera hundra år.

Jag hade också insett att många av de viktigaste framstegen i matematiken berodde på uppfinningar – inte på upptäckter. De arabiska siffrorna, bråkstrecket, decimalkommat, likhetstecknet. De är alla uppfinningar som revolutionerat matematiken. Detta har också en pedagogisk konsekvens som är självklar, men som sällan betonas. Uppfinningar skall man lära sig att använda – det är ingenting att förstå.

Ändå talar alla om att "matematik måste man förstå" och många talar föraktfullt om "utantillkunskaper". Jag ser det inte så. All inläring börjar med *utantillkunskaper* och ett gott minne är nog den mest underskattade komponenten i matematikbegåvningen. Jag har under senare år alltmer kommit att inse minnets stora betydelse, varvid det bästa argumentet kanske är iakttagelsen att en av de viktigaste faktorerna i framställandet av allt bättre datorer är har varit att datorminnena blivit allt större och allt snabbare. Något som också finns med i bilden var att jag kom underfund om att de stora muslimska tänkarna under medeltiden upptäckts och fått chansen att utbilda sig när de vid 9-10 års ålder hade lärt sig Koranen utantill.

Det första man ska göra när man får en ny uppfinning i sin hand är att lära sig att hantera den, det må vara alfabetet, siffrorna, cykeln, TVn eller datorn. De viktigaste uppfinningarna i matematiken är verktyg och det första man måste lära sig är att handskas med verktygen. Nästa steg blir att använda dem och det är för att göra det som alla barn sitter dag in och dag ut (åtminstone under mattelektionerna) och räknar. När man sedan får problem där det gäller att lista ut hur verktygen ska användas – då finns det faktiskt ett inslag av förståelse. Det gäller att förstå problemet! Där har vi numera ett delvis nytt fenomen i den svenska skolan i det att för barn som inte har svenska som förstaspråk, så är det språkförståelsen som är den stora stötestenen.

Undan för undan så introduceras nya begrepp och nya verktyg, som vi först ska lära oss att hantera och sedan att använda, och efter ett tag har vi vant oss vid det nya. I det här avseendet så är matematiken mycket mer av ett hantverk än de flesta andra ämnen i skolan. Så småningom har vi lärt oss så mycket så att vi riskerar att börja glömma det vi lärt oss tidigare. Då gäller det att få ett sammanhang i kunskaperna och det är inte alltid så självklart. Det är inte lätt att se att geometri och aritmetik hör ihop. Ändå gör de det och matematikerna har alltid vetat det, trots att det inte var förrän koordinatsystemet uppfanns som man på riktigt kunde börja lösa geometriska problem med räkning.

Avslutningsvis så vill jag säga att även om jag aldrig förstått vad det är att förstå, så har jag kunnat se vad det är att inte förstå. Det vanligaste skälet till riktig oförståelse är ofta ett otillräckligt minne. Istället för att förutsättningslöst ta till sig och vänja sig vid det nya så försöker eleven att klämma in det nya i gamla former där det inte passar.

Jag ska avsluta det här föredraget med att ge exempel på sådant som jag tagit upp med ”de duktigaste i klassen” när jag haft dem för mig själv.